



ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE
Strojnícka
fakulta

AUTOREFERÁT DIZERTAČNEJ PRÁCE

Žilina, 2024

Ing. Zdenko Šavrnok



ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE
Strojnícka
fakulta

Ing. Zdenko Šavrnoch

AUTOREFERÁT DIZERTAČNEJ PRÁCE
ANALÝZA VYBRANÝCH STAVOV ROTOROVÝCH SÚSTAV

Na získanie akademického titulu **doktor**
(„**philosophiae doctor**“, v skratke „**PhD.**“)
v študijnom odbore Strojárstvo
v študijnom programe Časti a mechanizmy strojov

Žilina 2024

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Žilinskej univerzite v Žiline, Strojníckej fakulte, Katedre aplikovanej mechaniky.

Predkladateľ: Ing. Zdenko Šavrnoch
Žilinská univerzita v Žiline
Strojnícka fakulta
Katedra aplikovanej mechaniky

Školiteľ: prof. Ing. Alžbeta Sapietová, PhD.
Žilinská univerzita v Žiline
Strojnícka fakulta
Katedra aplikovanej mechaniky

Oponenti:

1. doc. Ing. Vladimír Dekýš, CSc.
Žilinská univerzita v Žiline
Strojnícka fakulta
Katedra aplikovanej mechaniky
2. prof. Ing. Robert Grega, PhD.
Technická univerzita v Košiciach
Strojnícka fakulta
Katedra konštrukčného a dopravného inžinierstva
3. doc. Ing. Milan Naď, CSc.
Slovenská technická univerzita v Bratislave
Materiálovotechnologická fakulta STU so sídlom v Trnave
Ústav aplikovanej informatiky, automatizácie a mechatroniky

Autoreferát bol rozoslaný dňa:

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa 21.8.2024 o 12:00 hod. v miestnosti BB011 na SjF, Univerzitná 8215/1, 010 26, Žilina, pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce schválenou odborovou komisiou v študijnom odbore Strojárstvo, v študijnom programe Časti a mechanizmy strojov, vymenovanou dekanom Strojníckej fakulty, Žilinskej univerzity v Žiline.

S dizertačnou prácou je možné sa oboznámiť na referáte pre vedu a výskum dekanátu SjF, UNIZA, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina.

prof. Dr. Ing. Milan Sága
predseda komisie pre obhajobu dizertačnej práce

ÚVOD

Dynamika rotorov je špecializovaný odvetvie aplikovanej mechaniky. Skúma chod, správanie a diagnostiku rotujúcich zariadení a systémov, ktoré sa bežne používajú v rôznych priemyselných odvetviach ako je energetika, letectvo, doprava, výrobné technológie, obrábanie materiálov a iné. Základné komponenty rotačných strojov, pozostávajú z hriadeľov uložených v ložiskách, diskov a obežných kolies, ktoré upevnené na hriadeľi a počas prevádzky sú vystavené rôznym vnútorným a vonkajším silovým účinkom. V súčasnosti je hlavným cieľom vývoja v oblasti dynamiky rotorov dosiahnutie čoraz vyššej prevádzkovej rýchlosti, nakoľko táto najmä vo výrobných zariadeniach v konečnom dôsledku vplyva na zvýšenie produktivity. Stroj v oblasti energetiky, ktorý rotuje vyššou rýchlosťou, dokáže generovať, resp. transformovať viac energie. Preto dynamické analýzy rotorových systémov zahŕňajú určenie kritickej rýchlosti (kritických rýchlostí), analýzu prechodových javov rotora a tlmenie v systéme.

Dynamika rotorov zaznamenala v posledných desaťročiach významný pokrok, ktorý vyvolal pokrok vo výpočtovej technike, metódach výpočtov a nástrojoch počítačového modelovania. Softvéry pre numerické simulácie, ako napríklad MSC.ADAMS a ANSYS, sa stali nevyhnutnými nástrojmi na predpovedanie dynamického správania rotačných systémov a ich optimalizáciu. Výskum v oblasti dynamiky rotorov je multidisciplinárny a zameriava sa na rôzne aspekty.

Bez ohľadu na celkový pokrok v posledných rokoch však stále existujú oblasti dynamiky rotorov, ktoré si svojou náročnosťou a rozsiahlosťou vyžadujú hlbšie skúmanie. Medzi tieto oblasti patrí presné modelovanie zložitých systémov, pochopenie vplyvu nelineárnych javov, vývoj metód na modelovanie a simuláciu rotorových systémov s aktívnymi prvkami (magnetické ložiská, aktívne tlmiče), skúmanie vplyvu zmien prevádzkových podmienok, vývoj efektívnych stratégií na predikciu a detekciu porúch strojov. Výskum v tejto oblasti je nevyhnutný pre ďalší pokrok v konštrukcii a prevádzke rotačných strojov, zlepšení ich výkonu, zníženiu nákladov na ich údržbu a zvýšeniu bezpečnosti prevádzky.

CIELE DIZERTAČNEJ PRÁCE

Cieľom práce je: Príprava numerických modelov v prostredí MSC.ADAMS pre simulovanie nedokonalostí, resp. poruchových stavov rotorových sústav.

Na dosiahnutie cieľa bolo potrebné zrealizovať čiastkové ciele, t.j. prípravu, modelu, simulácia, analýza, rozbor dosiahnutých výsledkov a vyhodnotenie:

1. Numerického modelu rotora s poddajným hriadeľom a s poddajnými ložiskami.
2. Modelovanie vybraných nedokonalostí (nevyváženosť, šikmo nasadený kotúč, ich kombinácia).
3. Validácia simulačného modelu voči experimentálnemu modelu
4. Vyhodnotenie vplyvu neurčitostí na chod rotorových systémov s nedokonalosťami.

1. VÝVOJ DYNAMIKY ROTOROV

Dynamika rotačných strojov je odvetvie aplikovanej mechaniky, ktoré sa zaoberá štúdiom správania rotačných strojov.

Základy rotorovej dynamiky boli položené v 19. storočí analýzou kritických rýchlostí W. J. M. Rankina, pri ktorých dochádza k nadmernému vychýleniu hriadeľa. Rankinova teória naznačovala, že stroje nemôžu pracovať nad touto rýchlosťou, ale experimenty Carla Gustava De Lavalova s vysokorýchlostnými centrifúgami túto predstavu spochybnili. De Lavalova práca spolu s následným Föpplovým modelom rotora demonštrovali možnosť stabilnej prevádzky za prvou kritickou rýchlosťou. Toto bolo ďalej potvrdené Dunkerleyho experimentálnymi meraniami a Jeffcottovým matematickým modelom, čím sa upevnil teoretický základ tohto odboru.

Začiatok 20. storočia priniesol nové výzvy, keďže turbíny boli navrhnuté na prevádzku nad prvou kritickou rýchlosťou, čo viedlo k samobudeným nestabilitám. Výskumníci ako Newkirk a Kimball sa ponorili do skúmania vplyvu vnútorného a vonkajšieho tlmenia na stabilitu rotora, zatiaľ čo Stodola, Newkirk, Taylor a Kroon skúmali účinky kvapalinových ložísk a tepelných deformácií.

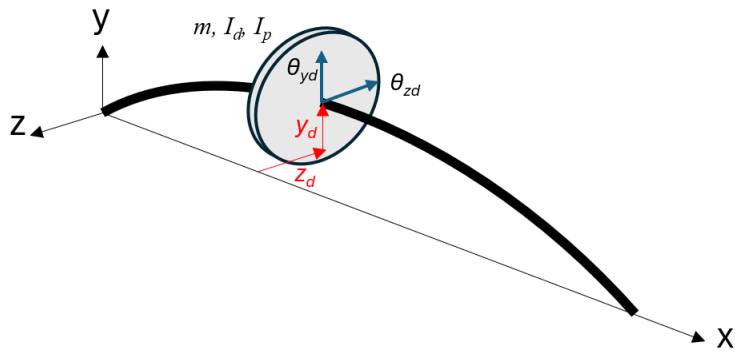
Pokroky vo výpočtových schopnostiach v polovici 20. storočia viedli k vývoju zložitejších modelov zahŕňajúcich nelinearity, ako sú trenie a vôle ložísk. Metóda konečných prvkov (FEM) a metóda hraničných prvkov (BEM) sa stali nevyhnutnými nástrojmi na riešenie rovníc, ktoré opisujú správanie rotorových systémov. Výskumníci ako Nelson, McVaugh, Rao a Childs sa zamerali na modelovanie nevyváženosti a nesprávneho vyrovnaní, čím zlepšili presnosť simulácií.

21. storočie bolo svedkom transformácie rotorovej dynamiky, poháňanej technologickým pokrokom. Integrácia výpočtovej dynamiky tekutín (CFD) s FEA prehĺbila naše chápanie interakcií tekutín a štruktúr v turbínových strojoch. Inteligentné systémy a prístupy založené na údajoch spôsobili revolúciu v detekcii a diagnostike porúch, zatiaľ čo metódy aktívneho riadenia vibrácií a inteligentné materiály ponúkajú inovatívne riešenia na zvýšenie výkonu a spoľahlivosti rotorových systémov.

Napriek tomuto pokroku pretrvávajú výzvy, najmä pri modelovaní nelineárnej dynamiky, interakcií medzi rotorom a statorom a vývoji účinných techník riadenia vibrácií. Snaha o presnú diagnostiku a predikciu porúch spolu s experimentálnym overovaním teoretických modelov zostáva ústredným bodom pokračujúceho vývoja rotorovej dynamiky.

2. NUMERICKÝ MODEL

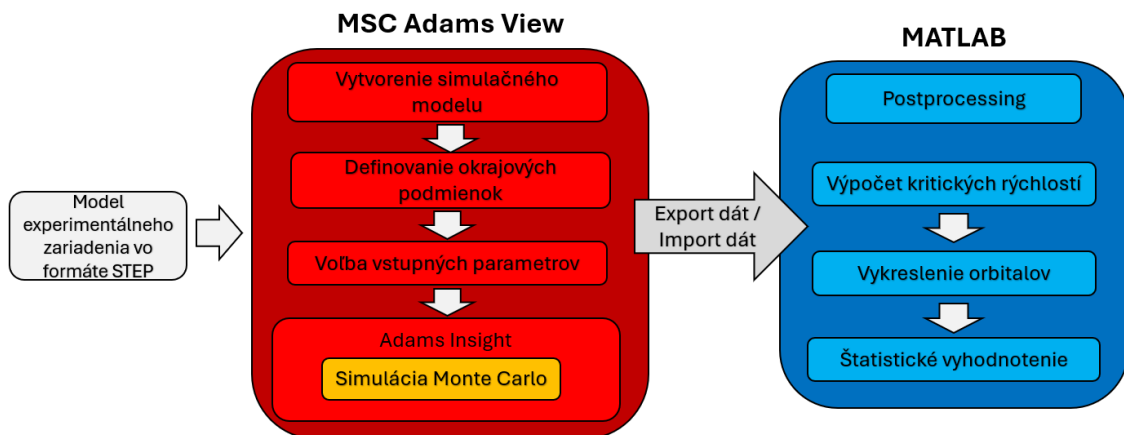
V oblasti dynamiky rotorov sa pri analýze chodu rotora často využíva zjednodušený model známy ako Lavalov rotor (v Európe) alebo Jeffcottov rotor (v ostatných častiach sveta) [43]. Tento model pozostáva z jedného tuhého disku namontovaného na pružnom nehmotnom hriadeľi, ktorý je uložený v dvoch totožných ložiskách. Jedným z kľúčových predpokladov tohto modelu je, že ložiská sa považujú za tuhé a nevykazujú žiadnu poddajnosť alebo deformáciu.



Obr. 1 Schematické znázornenie Lavalovho rotora

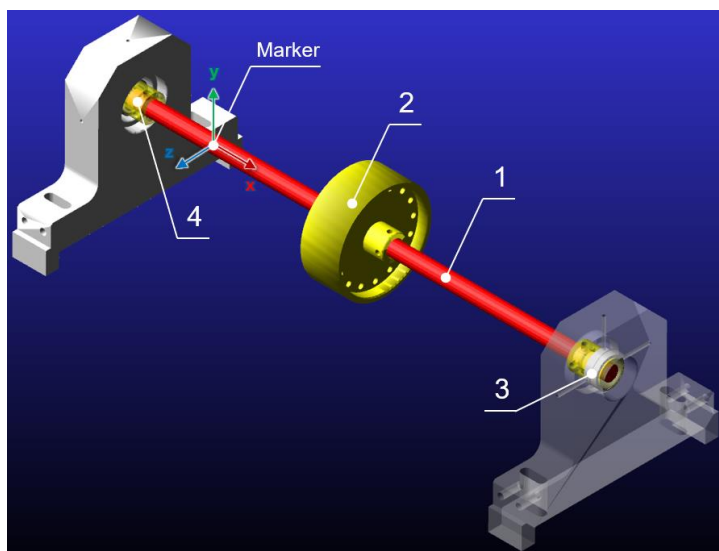
Toto zjednodušenie umožňuje zamerať sa na dynamické správanie systému rotor-hriadeľ bez toho, aby sa zavádzali ďalšie komplexné závislosti spojené s poddajnosťou ložísk. Predpoklad tuhého ložiska umožňuje analyzovať javy, ako sú kritické rýchlosti, odozva na nevyváženosť a charakteristiky stability systému rotora.

Hoci model Lavalovho/Jeffcottovho rotora poskytuje dobré východisko pre pochopenie správania rotora, je dôležité uvedomiť si jeho limity. V reálnych situáciách vykazujú ložiská určitý stupeň poddajnosti, čo môže ovplyvniť celkový chod rotorového systému. Preto sú na dosiahnutie vierohodnejších výsledkov v reálnych aplikáciách potrebné komplexnejšie modely, ktoré zahŕňajú aj flexibilitu ložísk a iné parametre ovplyvňujúce chod systému ako je vonkajšie, vnútorné tlmenie, ložiskové vôle, nesúososť a pod.



Obr. 2 Grafické znázornenie pracovného postupu

Táto práca sleduje chod niekoľkých definovaných modelov Lavalovho rotora, ktoré reprezentujú vybrané poruchové stavy. Numerická analýza je spracovaná v prostredí programu MSC Adams / View. Viac ako 3000 numerických simulácií bolo realizovaných na výpočtovej platforme s procesorom 11th gen Intel(R) Core(TM) i5-11400F (2,60 GHz, 6 jadier, 12 vlákien) a 32 GB operačnej pamäte RAM (2993 MHz). Pre pružnú a názornú interpretáciu výsledkov bol zvolený program MATLAB [39]. Obr. 2 prezentuje schému toku dát v jednotlivých programoch.



Obr. 3 Reprezentácia modelu v prostredí MSC Adams View

2.1 Metodológia vyhodnotenia výsledkov

Vzhľadom na skutočnosť, že vo výrobných a montážnych procesoch nikdy nie je možné dosiahnuť 100 % mieru zhody medzi výkresovou nominálnou hodnotou parametru z dokumentácie a skutočným parametrom výrobku, tak v systéme je vždy prítomná istá miera neurčitosti (napr. v podobe tolerancií), ktorá ovplyvňuje jeho činnosť.

Aby bolo možné dôkladne posúdiť správanie vybraných konfigurácií rotora, boli vykonané simulácie metódou Monte Carlo [50,51]. Pri týchto simuláciách sa systematicky menili dôležité vstupné parametre v počte minimálne 100 behov. Touto metódou sa získali súbory údajov, ktoré boli základom pre následnú analýzu. Ako vstupné parametre pre pravdepodobnostnú analýzu boli zvolené parametre (Príloha D), ktoré sú považované za parametre s najväčším vplyvom na chod rotorovej sústavy. Matica vstupných hodnôt pre analýzu Monte Carlo bola vytvorená v prostredí programu Adams Insight (Príloha D) s premennými (vstupnými argumentmi), ktorých hodnoty a rozsahy sú uvedené v Tab. 1.

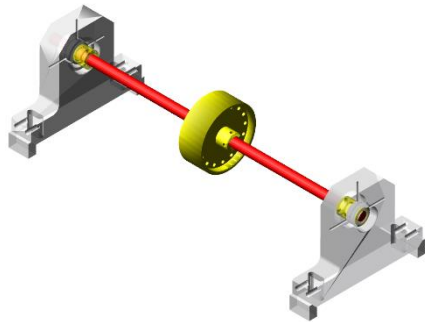
Tab. 1 Vstupné premenné pre Monte Carlo analýzu

	Ľavé ložisko			Pravé ložisko			Hmotnosť disku
Premenné	Faktor axiálneho tlmenia [-]	Faktor radiálneho tlmenia [-]	Ložisko vá vôľa [μm]	Faktor axiálneho tlmenia [-]	Faktor radiálneho tlmenia [-]	Ložisko vá vôľa [μm]	Nevyvážená hmota [g]
Rozsah	0,01 – 0,03	0,01 – 0,03	5 – 20	0,01 – 0,03	0,01 – 0,03	5 – 20	2 – 4

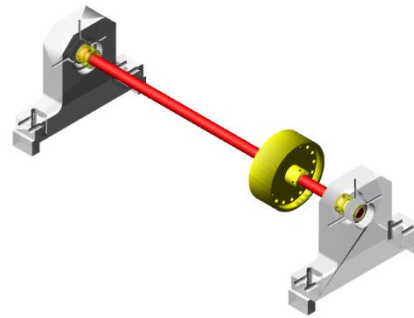
2.2 Analyzované konfigurácie rotora

V analýzach sa uvažovalo s dvoma hlavnými konštrukčnými prevedeniami rotora, ktoré boli charakterizované polohou disku na hriadeli (Obr. 4, 5). Konkrétne s diskom umiestneným v centrálnej polohe a s diskom umiestneným mimo centrálnej polohy. Z týchto dvoch základných konštrukčných

prevedení potom vychádzajú jednotlivé analyzované konfigurácie rotora, ktoré sú predmetom tejto práce.

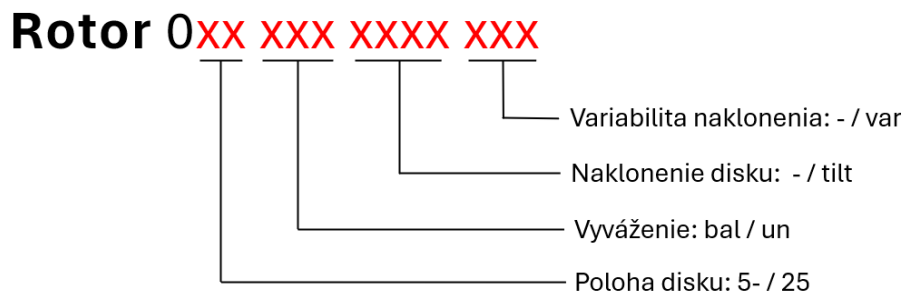


Obr. 4 Centrálne umiestnený disk (vo vzdialenosti $\frac{1}{2}$ dĺžky hriadeľa od pravého ložiska)



Obr. 5 Disk umiestnený mimo centrálnej polohy (vo vzdialenosti $\frac{1}{4}$ dĺžky hriadeľa od pravého ložiska)

Vzhľadom na niekoľko odlišných konfigurácií systému rotora bolo zavedené ich kódové označenie, tzv. nomenklatúra. Toto označenie bolo vytvorené so zámerom na ich jednoduchšie identifikovanie a odkazovanie v texte (Obr. 6).



Obr. 6 Nomenklatúra jednotlivých konfigurácií rotora

Kde:

var – variable (variabilný uhol naklonenia disku v rozsahu 2°)

tilt – tilted (naklonený disk, ak nie je použitý identifikátor „var“, potom $\beta = 2^\circ$)

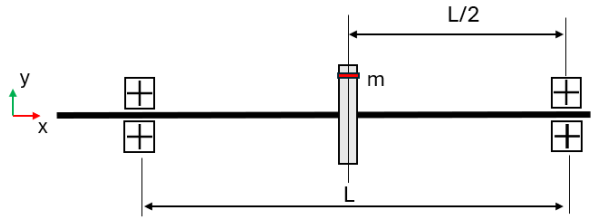
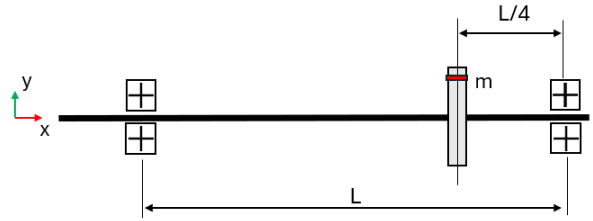
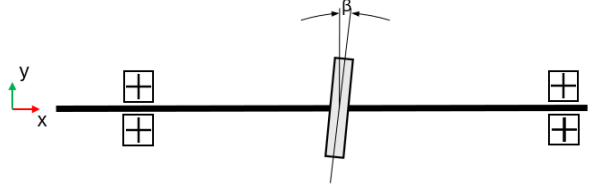
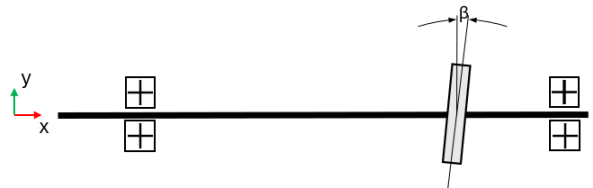
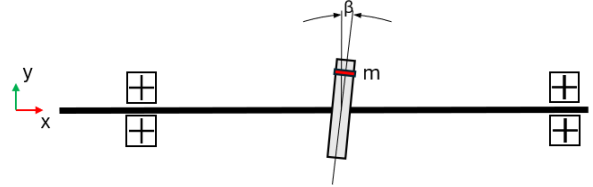
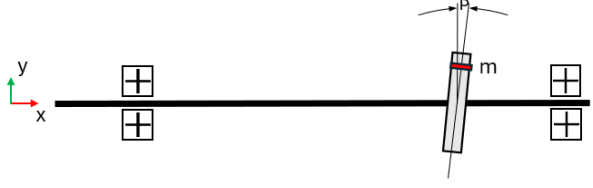
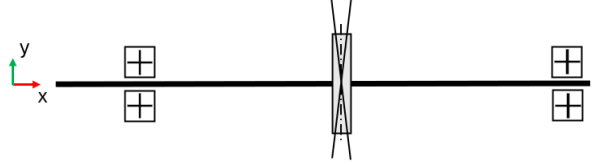
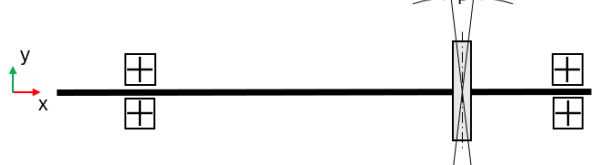
bal – balanced (vyvážený disk)

un – unbalanced (nevyvážený disk)

5-/25 – poloha disku $\frac{1}{2}$ resp. $\frac{1}{4}$, Obr. 4, 5.

Schematické vyobrazenie jednotlivých vyšetrovaných konfigurácií rotora s kódovým zápisom (Obr. 6) názvov obsahuje Tab. 2.

Tab. 2 Prehľad jednotlivých vyšetovaných konfigurácií rotora

<p>Rotor 05 un</p>	
<p>Rotor 025 un</p>	
<p>Rotor 05 bal tilt</p>	
<p>Rotor 025 bal tilt</p>	
<p>Rotor 05 un tilt</p>	
<p>Rotor 025 un tilt</p>	
<p>Rotor 05 bal tilt var (Príloha B – dizertačná práca)</p>	
<p>Rotor 025 bal tilt var (Príloha C – dizertačná práca)</p>	

3. POROVNANIE VPLYVU DEFEKTOV NA JEDNOTLIVÉ KONFIGURÁCIE ROTOROV

Vo všeobecnosti platí, že bod umiestnenia disku na hriadeli proporciálne ovplyvňuje hodnotu kritickej rýchlosti. Pre centrálnu polohu je táto hodnota najnižšia. Naopak čím ďalej sa disk posúva smerom od centrálnej polohy, hodnota kritickej rýchlosti rastie. Ako sa však ovplyvní chod rotora keď sa do systému vnesie dodatočný nevyvážená hmota alebo naklonenie disku? Pre lepšiu predstavu a zhrnutie získaných poznatkov je v kapitole uvedená Tab. 3. Jednotlivé percentuálne rozpätia sú počítané podľa vzťahu (1).

$$\text{Percentuálne rozpätie} = ((\Omega_{crit_{max}} - \Omega_{crit_{min}}) / \Omega_{crit_{max}}) \cdot 100 \quad (1)$$

Kde: $\Omega_{crit_{max}}$ – maximálna kritická rýchlosť v rozsahu [rad/s]

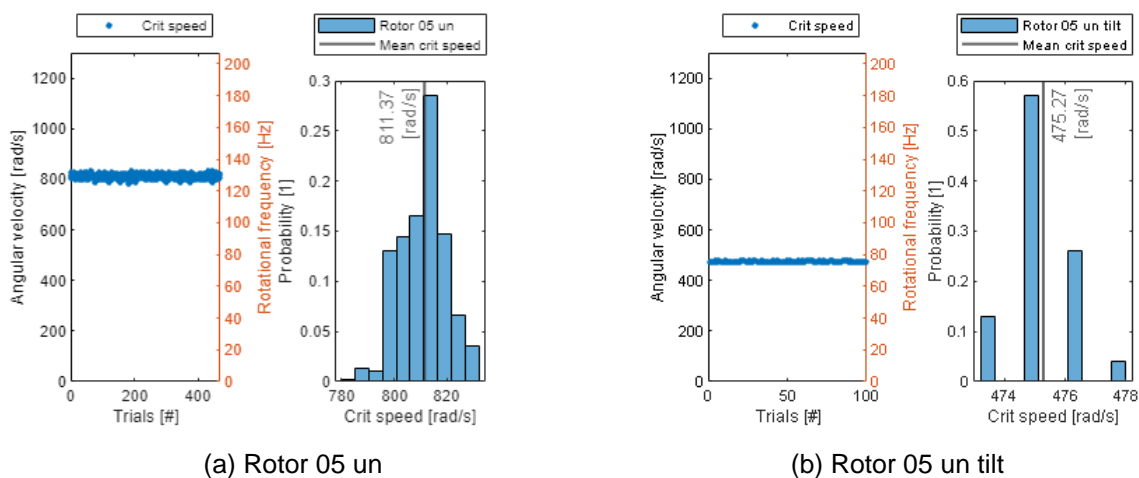
$\Omega_{crit_{min}}$ – minimálna kritická rýchlosť v rozsahu [rad/s]

Tab. 3 Porovnanie rozpätí kritických otáčok

Konfigurácia	Kritické otáčky [rad/s]	Rozsah kritických otáčok [rad/s]	Percentuálne rozpätie hodnôt [%]	Tvar orbity
Rotor 05 un	811	780 – 830	6	Kruhová
Rotor 025 un	1146	1100 – 1200	8,3	Kruhová
Rotor 05 bal tilt	475	469 – 476	1,47	Eliptická
Rotor 025 bal tilt	686	687 – 691	0,7	Eliptická
Rotor 05 un tilt	476	473 – 478	1,04	Eliptická
Rotor 025 un tilt	690	691,1 – 691,9	0,12	Eliptická

3.1 Priamy nevyvážený vs. Naklonený nevyvážený

Pri porovnaní systémov, kde figuruje nevyvážená hmota, konkrétne pri konfigurácii rotorov s centrálnym diskom (Rotor 05 un, Rotor 05 un tilt), si môžeme všimnúť „normálne“ rozdelenie pravdepodobnosti (Obr. 7(a) & Obr. 7(b)) kritickej uhlovej rýchlosti.



Obr. 7 Hodnota kritickej rýchlosti (bodový diagram) a jej pravdepodobnosť (histogram)

Pre percentuálne vyjadrenie zmeny kritických otáčok je použitý vzorec (2).

$$\text{Zmena kritických otáčokach} = \left(\frac{\Omega_{crit_{naklonený}} - \Omega_{crit_{priamy}}}{\Omega_{crit_{naklonený}}} \right) * 100 \quad (2)$$

Kde: $\Omega_{crit_{naklonený}}$ – kritické otáčky naklonenej konfigurácie

$\Omega_{crit_{priamy}}$ – kritické otáčky priamej konfigurácie

Tab. 4 Porovnanie zmeny kritických otáčok nevyvážených rotorových sústav

Porovnávané konfigurácie	Percentuálna zmena kritických otáčok [%]
Rotor 05 un vs. Rotor 05 un tilt	58,7
Rotor 025 un vs Rotor 025 un tilt	60,21

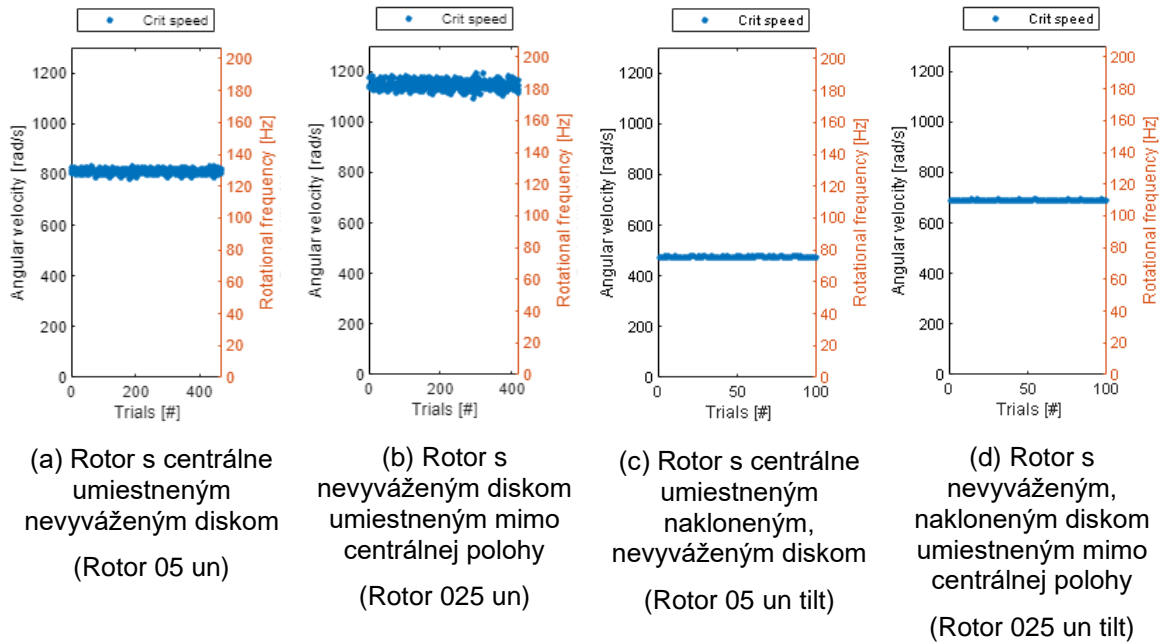
V porovnaní tvorí hodnota kritickej rýchlosti systému s nevyváženým, nakloneným, centrálne uloženým diskom 58,7 % hodnoty systému s priamym diskom. Čiže gyroskopický efekt neprispieva k zvýšeniu tuhosti systému ale ku zvýšeniu stability (bolo by zaujímavé pozrieť sa na torzné kmity pri naklonených diskoch). Čo sa týka variability kritických rýchlostí, pohybuje sa ich rozptyl v rozmedzí 780 - 830 [rad/s] pre Rotor 05 un čo predstavuje 6 % variáciu kritickej rýchlosti. Pre konfiguráciu Rotor 05 un tilt je rozptyl kritickej rýchlosti menší, konkrétne sa pohybuje v intervale 476 - 478 [rad/s] čo predstavuje 1,47 %.

Rozptyl kritických rýchlostí naznačuje, že veľkosť nevyvázenej hmoty priamo úmerne ovplyvňuje veľkosť odstredivej sily, tým pádom aj priehyb poddajného hriadeľa a veľkosť amplitúdy jeho orbity. S rastom nevyvázenej hmoty rastie aj kritická rýchlosť (Obr. 10(a) & Obr. 10(b)).

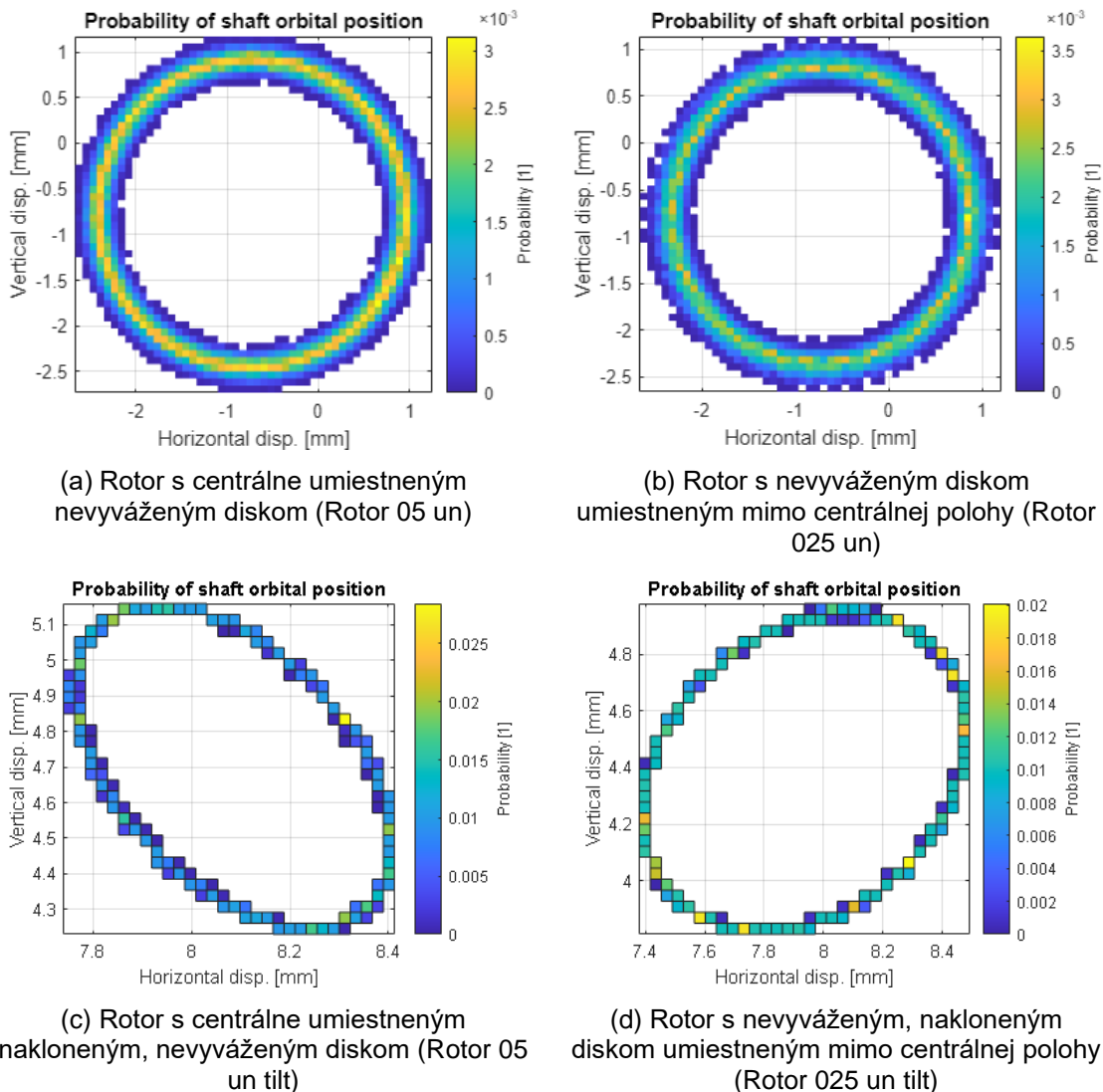
Gyroskopický efekt systém nespevňuje (Gyroscopic stiffening [20,53]) ale stabilizuje. Čo je viditeľné pri malej disperzii kritických rýchlostí pre všetky konfigurácie s nakloneným diskom kde sa variabilita kritických rýchlostí pohybuje v rozmedzí od 0.12 % do 1.47 %.

Rovnako pri porovnaní kritických uhlových rýchlostí predstavuje hodnota kritickej rýchlosti konfigurácie s nakloneným diskom 60,21 % hodnoty uhlovej rýchlosti konfigurácie s priamym diskom (Tab. 4).

Variability ich kritických rýchlostí reprezentujú extrémne hodnoty medzi jednotlivými analýzami. Percentuálna hodnota variácie kritickej rýchlosti rotora s nevyváženým diskom umiestneným mimo centrálnej polohy predstavuje v súbore analýz maximum s 8,3 %. Oproti tomu je opačný extrém konfigurácia s nakloneným diskom. Predstavuje systém s najmenšou variabilitou kritickej rýchlosti, konkrétne 0,12 % (Tab. 3).

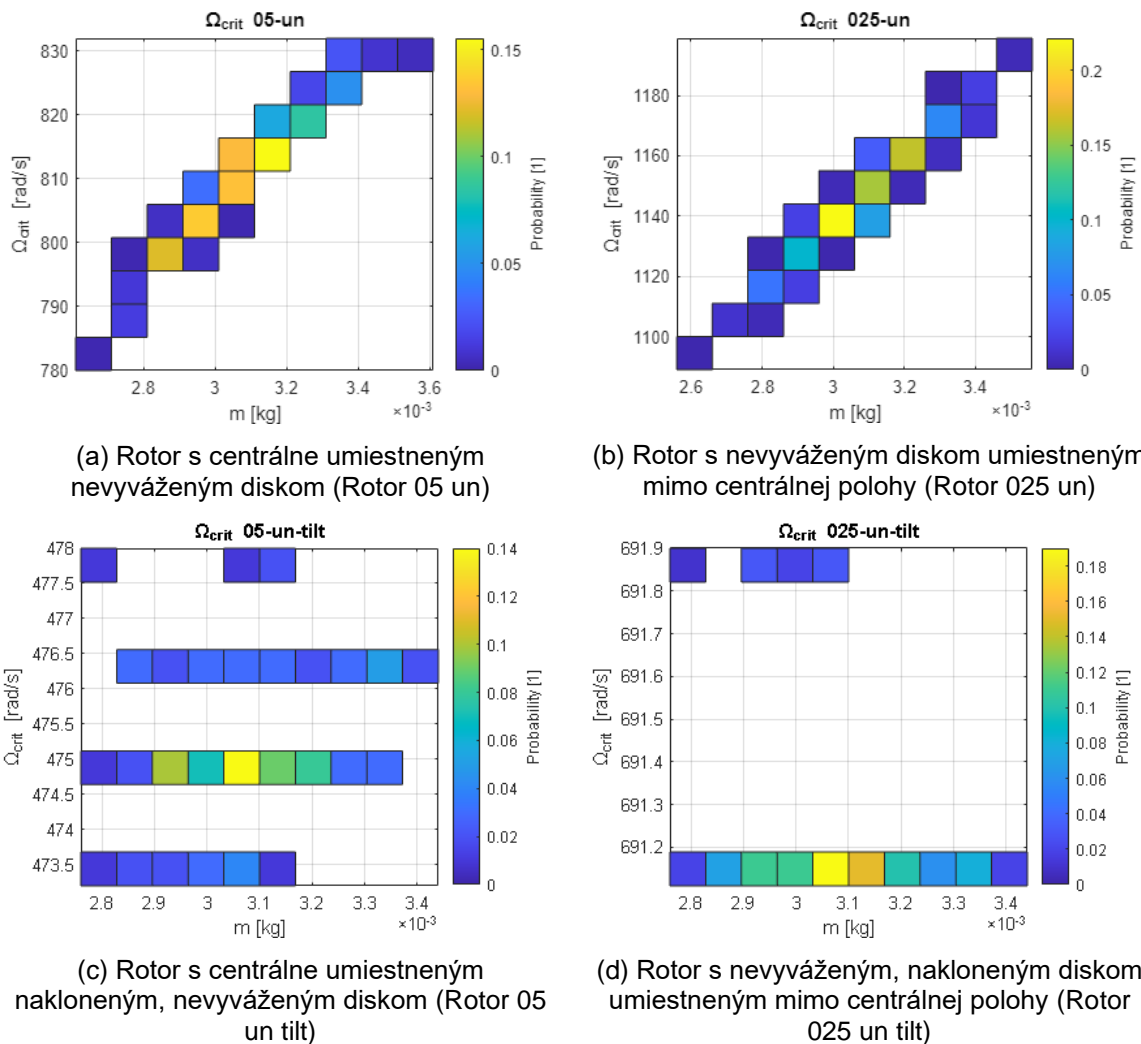


Obr. 8 Porovnanie bodových diagramov kritických rýchlostí konfigurácií rotorov s nevyváženým diskom



Obr. 9 Porovnanie pravdepodobnosti tvaru a polohy orbít konfigurácií rotorov s nevyváženým diskom

Naklonenie disku priamo ovplyvňuje orbitu hriadeľa. Pri pohľade na Obr. 9 si môžeme všimnúť ako sa zmení tvar orbity pri nevyvážených konfigurácií rotorov keď sa do systému dodatočne vnesie naklonenie disku. Orbity konfigurácií rotorov s nevyváženým priamym diskom zmenia svoj tvar z kruhového na eliptický. Pre konfigurácie rotora s centrálne uloženým diskom má eliptická orbita hriadeľa kladný smer naklonenia (CCW - counterclockwise) (Obr. 9(c)). Pri konfiguráciách kde je disk umiestnený mimo centrálnej polohy je eliptická orbita hriadeľa naklonená záporne (CW - Clockwise) (Obr. 9(d)).



Obr. 10 Závislosť kritickej rýchlosti od nevyváženej hmoty

Vzťah medzi kriticou rýchlosťou a nevyváženou hmotou je dobre viditeľný pre konfigurácie rotorov s priamym diskom (Obr. 10(a) a Obr. 10(b)). Prejavuje sa takmer lineárna závislosť. Oproti tomu pre nevyvážené systémy s nakloneným diskom sa jasne čitateľná závislosť vytráca. Pri rotore s centrálne uloženým, nevyváženým, nakloneným diskom sa zdá, že s rastúcou nevyváženou hmotou má kritická rýchlosť mierne stúpajúcu tendenciu (Obr. 10(c)), čo môže signalizovať podobnú „lineárnu“ závislosť ako v prípade konfigurácie s centrálne uloženým nevyváženým, priamym diskom (Obr. 10(a)). Vnesenie dodatočného naklonenia nevyváženého disku v mieste mimo centrálnej polohy spôsobí stabilizáciu kritickej rýchlosti daného systému a kritická rýchlosť stráca závislosť na nevyváženej hmoty v jej rozsahu (Obr. 10(d)). Kritická rýchlosť kopíruje rozdelenie pravdepodobnosti nevyváženej hmoty (Obr. 10(d)). Nespojité charakter výsledkov (Obr. 10(c),(d)) by si vyžadoval ďalšiu analýzu.

3.2 Naklonený vyvážený vs. naklonený nevyvážený

Pre ucelený prehľad a zhrnutie získaných poznatkov je v kapitole uvedená Tab 9, kde sú jednotlivé percentuálne rozpätia vypočítané podľa vzťahu (3).

$$\text{Zmena kritických otáčok} = \left((\Omega_{crit_{nevyvážený}} - \Omega_{crit_{vyvážený}}) / \Omega_{crit_{nevyvážený}} \right) * 100 \quad (3)$$

Kde: $\Omega_{crit_{nevyvážený}}$ – kritické otáčky nevyváženej konfigurácie

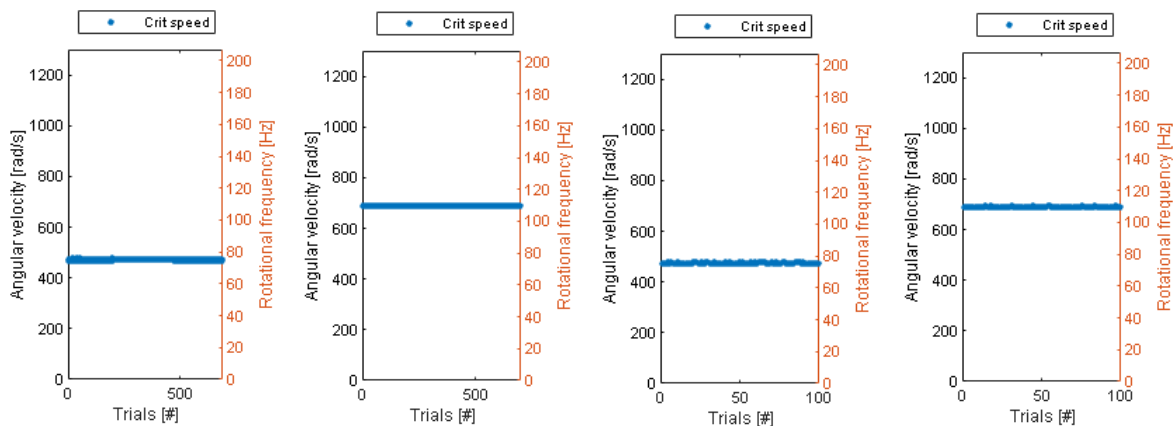
$\Omega_{crit_{vyvážený}}$ – kritické otáčky vyváženej konfigurácie

Tab. 5 Porovnanie zmeny kritických otáčok naklonených rotorových sústav

Porovnávané konfigurácie	Percentuálna zmena kritických otáčok [%]
Rotor 05 un tilt vs. Rotor 05 bal tilt	0,21
Rotor 025 un tilt vs Rotor 025 bal tilt	0,58

Kritická rýchlosť systému s centrálne umiestneným nakloneným diskom sa po pridaní nevyváženej hmoty zmení o 0,21 % (Tab. 5).

Pre konfiguráciu s nakloneným diskom umiestneným mimo centrálnej polohy sa po pridaní nevyváženej hmoty zmení o 0,58 % (Tab. 5).



(a) Rotor s centrálne umiestneným nakloneným, vyváženým diskom (Rotor 05 bal tilt)

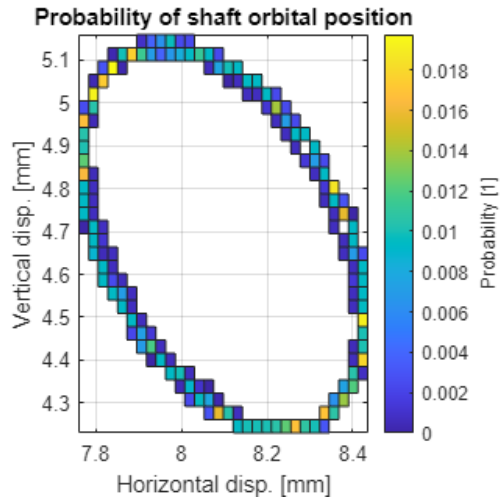
(b) Rotor s nakloneným, vyváženým diskom umiestneným mimo centrálnej polohy (Rotor 025 bal tilt)

(c) Rotor s centrálne umiestneným nakloneným, nevyváženým diskom (Rotor 05 un tilt)

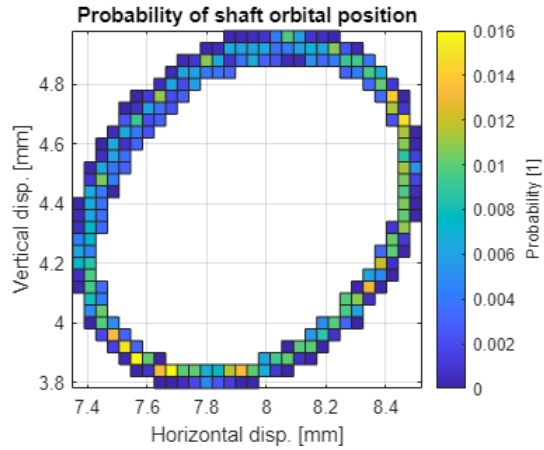
(d) Rotor s nakloneným, nevyváženým diskom umiestneným mimo centrálnej polohy (Rotor 025 un tilt)

Obr. 11 Porovnanie bodových diagramov kritických rýchlostí konfigurácií rotorov s nakloneným diskom

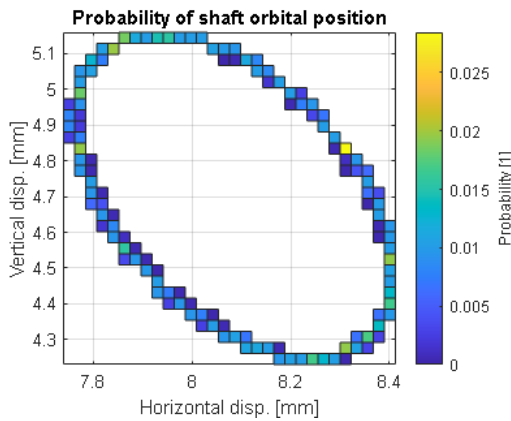
Vplyv nevyváženej hmoty na hodnoty kritických rýchlostí konfigurácií s nakloneným diskom je malý. Zo simulácií vyplýva, že pridaním nevyváženej hmoty sa rozptyl kritickej rýchlosti oproti konfiguráciám s vyváženým rotorom zúži.



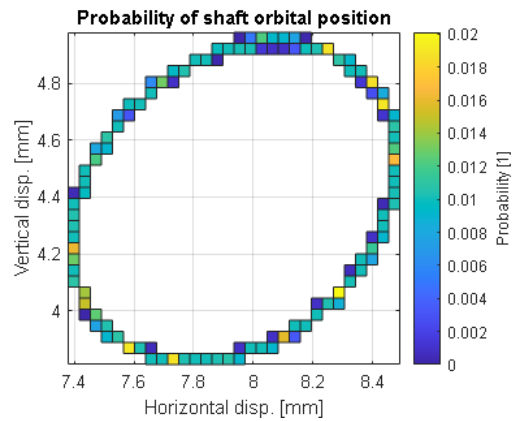
(a) Rotor s centrálne umiestneným nakloneným, vyváženým diskom (Rotor 05 bal tilt)



(b) Rotor s vyváženým, nakloneným diskom umiestneným mimo centrálnej polohy (Rotor 025 bal tilt)



(c) Rotor s centrálne umiestneným nakloneným, nevyváženým diskom (Rotor 05 un tilt)



(d) Rotor s nevyváženým, nakloneným diskom umiestneným mimo centrálnej polohy (Rotor 025 un tilt)

Obr. 12 Porovnanie pravdepodobnosti tvaru a polohy orbít konfigurácií rotorov s nakloneným diskom

Pridanie nevyváženej hmoty do systému rovnako ovplyvňuje aj orbitu hriadeľa. Pri porovnaní jednotlivých orbít systémov s nakloneným diskom (Obr. 12) si môžeme všimnúť zúženie rozptylu pravdepodobnosti polohy a tvaru orbity zvlášť v prípade disku umiestneného mimo centrálnej polohy (Obr.10(b) a Obr. 10(d)).

PRÍNOS PRE TECHNICKÚ PRAX

Táto dizertačná práca detailne skúmala dynamické správanie rotorov v rámci modelu Lavalovho rotora, pričom bola zameraná na dva typy konštrukčných konfigurácií: disk umiestnený v centrálnej polohe a disk umiestnený mimo centrálnej polohy. A dva špecifické typy poruchových stavov/konfigurácií: rotor s nevyváženým diskom a rotor s nakloneným diskom. Výsledky analýzy poskytujú cenné informácie o vplyve týchto parametrov na kritickú rýchlosť, stabilitu a celkový chod rotora.

Vplyv nevyváženosti: V prípade rotorov s nevyváženou hmotnosťou sa preukázala vysoká konzistentnosť a predvídateľnosť kritickej rýchlosti. Monte Carlo simulácie potvrdili, že variabilita vstupných parametrov, ako je axiálne a radiálne tlmenie ložísk a hmotnosť nevyváženej hmoty, mala minimálny vplyv na kritickú rýchlosť. Tento poznatok je kľúčový pre tých, ktorí navrhujú a prevádzkujú rotačné stroje, pretože im umožňuje presnejšie predikovať kritickú rýchlosť a vyhnúť sa jej pri prevádzke, čím sa minimalizuje riziko rezonancie a následného poškodenia.

Vplyv náklonu disku: V prípade rotorov s nakloneným diskom bol pozorovaný významný vplyv náklonu na kritickú rýchlosť a kmitanie. Náklon disku spôsobuje gyroskopický efekt, ktorý vedie k precesii rotora, čo sa prejavuje eliptickou dráhou hriadeľa a komplexnejším charakterom vibrácií. Tieto zistenia zdôrazňujú dôležitosť zohľadnenia náklonu disku pri návrhu rotorových systémov, pretože môže výrazne ovplyvniť ich dynamické vlastnosti a stabilitu.

Softvérové nástroje: V dizertačnej práci boli využité softvérové nástroje MATLAB a MSC Adams. MATLAB poskytol platformu pre analýzu dát, zatiaľ čo MSC Adams umožnil modelovanie a simuláciu dynamického správania rotorových systémov. Využitie týchto nástrojov v práci potvrdzuje relevantnosť v oblasti dynamiky rotorov. Umožňujú komplexnú analýzu a simuláciu rôznych scenárov. Ich použitie v tejto práci prispelo k získaniu výsledkov, ktoré majú praktický význam pre technickú prax. Zároveň práca demonštruje, ako možno tieto nástroje efektívne využiť pri riešení konkrétnych problémov v oblasti dynamiky rotorov.

Všeobecné praktické aplikácie: Výsledky tejto práce môžu inžinierom, konštruktérom a výpočtárom poskytnúť nástroje na presnejšiu predikciu a kontrolu kritickej rýchlosti rotorov. To je kľúčové pre zabezpečenie bezpečnej a efektívnej prevádzky rotačných strojov. Okrem toho, pochopenie vplyvu nevyváženosti a náklonu disku umožňuje optimalizovať procesy vyvažovania a montáže, čo vedie k zníženiu nežiaduceho kmitania, k zvýšeniu životnosti strojov a k určaniu rizika (s využitím pravdepodobnostného prístupu), ku ktorému môže dôjsť pri prekročení prípustných medzi sledovaných výstupných parametrov.

Zoznam použitej literatúry

- [1] **Genta G.:** *Dynamics of Rotating Systems*. Springer Science & Business Media, 2005. ISBN 0-387-20936-0
- [2] **Zapoměl J., Ferfecki P., Kozánek J.:** *Avoiding disc collisions and nonlinear vibration of unbalanced rotors by means of position control of the rotor journal mounted in magnetorheological hydrodynamic bearings*. Volume 151, 2023, 104378. ISSN 0020-7462. DOI:10.1016/j.ijnonlinmec.2023.104378
- [3] **Nelson, H. D.:** *A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory*. Journal of Mechanical Design, 102(4), 793-803. 1980. <https://doi.org/10.1115/1.3254824>
- [4] **Wang R, Wang Y, Cao X, Yang S, Guo X.:** *Nonlinear Analysis of Rotor-Bearing-Seal System with Varying Parameters Muszynska Model Based on CFD and RBF*. *Machines*. 2022; 10(12):1238. <https://doi.org/10.3390/machines10121238>
- [5] **Kamenický J., Malenovský, E., Zapoměl, J.:** *Numerical Analysis of Dynamic Properties of Nonlinear Rotor Systems of Aircraft Jet Engines*, International Journal of Rotating Machinery, 6, 452064, 11 pages, 2000. <https://doi.org/10.1155/S1023621X00000312>
- [6] **Jardine A. K. S., Lin D., Banjevic D.:** *A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance*. Mechanical Systems and Signal Processing, 20(7), 1483-1510 (2006).
- [7] **Lee J., Wu F., Zhao W., Ghaffari M., Liao L., Siegel D.:** (2014). *Prognostics and health management design for rotary machinery systems—Reviews, methodology and applications*. Mechanical Systems and Signal Processing, 42(1-2), 314-334.
- [8] **Ma, Leixin & Resvanis, Themistocles & Vandiver, J.:** (2020). *Using Machine Learning to Identify Important Parameters for Flow-Induced Vibration* ASME 2020 39th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. 10.1115/OMAE2020-18325. <https://doi.org/10.1115/OMAE2020-18325>
- [9] **Schweitzer G., Maslen E. H., Bleuler H.:** (2009). *Magnetic bearings: Theory, design, and application to rotating machinery*. Springer Science & Business Media ISBN 978-3-642-00496-4
- [10] **Preumont, A.:** (2018). *Vibration control of active structures: An introduction*. Springer. ISBN 978-3-319-72295-5
- [11] **Zapoměl J., Koláček J., Kozánek J., Košina J.:** (2023). *Analysis of Levitated Flywheels Mounted in Superconducting Bearings*. In: Okada, M. (eds) *Advances in Mechanism and Machine Science*. IFToMM WC 2023. Mechanisms and Machine Science, vol 147. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-45705-0_83

- [12] **Friswell M.I., Penny J.E.T., Garvey S.D., Lees A.W.:** (2010). *Dynamics of rotating machines*. Cambridge University Press. ISBN 9780521850162
- [13] **Murín J., Hrabovský J., Kutiš V.:** *Metóda konečných prvkov*. Nakladateľstvo STU (2015) ISBN 978-80-227-4298-6
- [14] **Nelson H. D., McVaugh J. M.:** (1976). *The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements*. Journal of Engineering for Industry, 98(2), 593-600.
- [15] **Grewal A., Modi V.J.:** *Dynamics and control of multibody systems: An approach with application*. Acta Astronautica, Volume 39, Issue 5, 1996, Pages 323-346, ISSN 0094-5765, [https://doi.org/10.1016/S0094-5765\(96\)00108-7](https://doi.org/10.1016/S0094-5765(96)00108-7).
- [16] **Liu Q, Thompson DJ, Xu P, Feng Q, Li X.:** *Investigation of train-induced vibration and noise from a steel-concrete composite railway bridge using a hybrid finite element-statistical energy analysis method*. Journal of Sound and Vibration. 2020;471. doi:10.1016/j.jsv.2020.115197.
- [17] **Kramer, E.:** (1993): *Dynamics of Rotors and Foundations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-662-02800-1
- [18] **Rao, J. S.:** (1996). **Rotor Dynamics, 3rd Edition**. New Age International Publishers. ISBN . 978-8122409772
- [19] **Childs D.:** (1993). *Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, & Analysis*. Wiley. ISBN: 978-0-471-53840-0
- [20] **Gasch R., Pfutzner H.:** *Dynamika rotorů*. SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1980. Číslo publikace 04-226-80.
- [21] **ISHIDA Y.:** *Review of Research on Nonlinear Rotordynamics in Japan*. Journal of System Design and Dynamics, 2013, Volume 7, Issue 2, Pages 151-169, Released on J-STAGE June 28, 2013, Online ISSN 1881-3046, <https://doi.org/10.1299/jsdd.7.151>
- [22] **Muszynska A.:** (2005). *Rotordynamics (1st ed.)*. CRC Press. ISBN 9780824723996. <https://doi.org/10.1201/9781420027792>
- [23] **Tiwari R.:** (2017). *Rotor systems: analysis and identification*. CRC Press. ISBN 9781315230962
- [24] **Ehrich, F.F.:** (1999). *Handbook of Rotordynamics*. McGraw-Hill. ISBN 9780070193307
- [25] **Lye A., Cicirello A., Patelli E.:** *Sampling methods for solving Bayesian model updating problems: A tutorial*. Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 159, 2021, 107760, ISSN 0888-3270. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.107760>
- [26] **Ritto T.G., Lopez R.H., Sampaio R., Souza de Cursi J.E.:** (2010). *Robust optimization of a flexible rotor-bearing system using the Campbell diagram*. Engineering Optimization, 43(1),77–96

<https://doi.org/10.1080/03052151003759125>

- [27] **Chao Fu, Jean-Jacques Sinou, Weidong Zhu, Kuan Lu, Yongfeng Yang:** *A state-of-the-art review on uncertainty analysis of rotor systems*. Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 183, 2023, 109619, ISSN 0888-3270, <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.109619>.
- [28] **Sarrouy E., Dessombz O., and Sinou J.:** (2012). *Stochastic Analysis of the Eigenvalue Problem for Mechanical Systems Using Polynomial Chaos Expansion— Application to a Finite Element Rotor*. ASME. J. Vib. Acoust. October 2012; 134(5): 051009. <https://doi.org/10.1115/1.4005842>
- [29] **Tudor-Bogdan Airimitoiaie, Ioan Doré Landau:** *Robust and Adaptive Active Vibration Control Using an Inertial Actuator*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63 (10), pp.6482-6489. [ff10.1109/TIE.2016.2548438](https://doi.org/10.1109/TIE.2016.2548438)
- [30] **Peradotto E., Panunzio A., Salles L., Schwingshackl C.W.:** *Stochastic Methods for Nonlinear Rotordynamics With Uncertainties*. ASME Turbo Expo 2015: Turbine Technical Conference and Exposition, Jun 2015, Montreal, Canada. [ff10.1115/GT2015-43534ff](https://doi.org/10.1115/GT2015-43534ff). [ffhal-02556332f](https://doi.org/10.1115/1.4005842)
- [31] **Xiu, D.:** (2010). *Numerical Methods for Stochastic Computations*. Princeton University Press. ISBN 9780691142128
- [32] **Alizadeh A., Ehmann C., Schönhoff U., Nordmann R.:** (2003). *Robust active vibration control of flexible rotors using piezo actuators as active bearing*. ISCORMA.
- [33] **Jeffcott H. H.:** (1919). *The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed. – The effect of want of balance*. Philosophical Magazine Series 6, 37(220), 304-314.
- [34] **Šavrnoch Z., Sapietová A., Dekýš V., Drvárová B.:** *SOLVER ANALYSIS FOR A ROTARY MACHINE MODEL IN MSC.ADAMS*. Conference of Applied Mechanics (2024)
- [35] Adams Solver User Guide for Adams 2023.4 by Hexagon. Product documentation.
- [36] **Brenan K.E., Campbell S.I., Petzold L.R.:** *Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. Classics in Applied Mathematics. ISBN: 0-89871-353-6 (1996).
- [37] **Hilber H.M., Hughes T.J.R, Taylor R.L.:** *Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics*. Earthquake Eng. and Struct. Dynamics, 5:283292 (1977).
- [38] **Byrtus M., Hajžman M., Zeman V.:** *Dynamika rotujících soustav*. Západočeská univerzita v Plzni, 2010. ISBN 978-80-7043-953-1.
- [39] **Sapietová A., Dekýš V., Jakubovičová L., Novák P., Sapieta M.:** *Dynamika riešená v programoch Matlab a MSC.ADAMS*. EDIS, Žilina, 2020.
- [40] **Musil M.:** *Základy dynamiky strojov s Matlabom*. STU (2013). ISBN 9788022739382.
- [41] **Gunter E.J.:** *Introduction to Rotor Dynamics*. RODYN, 2001.

- [42] **Gunter E.J.:** *Fundamentals of Rotor-Bearing Dynamics Using DyRoBeS*. RODYN 2002.
- [43] **Chen W.J., Gunter E.J.:** *Introduction to Dynamics of Rotor-Bearing Systems*. Victoria, BC: Trafford (2005). ISBN 978-1-4120-5190-3.
- [44] **Dimarogonas A.D.:** *A Brief History of Rotor Dynamics*. Rotordynamics '92, 1-10. Springer-Verlag London Limite, 1992. ISBN: 978-3-540-19754-6.
- [45] **Strang G.:** *Introduction to Applied Mathematics*. Wellesley-Cambridge Press (January 1, 1986). ISBN 978-0961408800
- [46] **Boyce M.P.:** *Gas Turbine Engineering Handbook 4th Edition*. Elsevier Inc. (2011). ISBN 978-0-12-383842-1.
- [47] **Sága M., Sapietová A., Žmindač M., Dekýš V.:** *Methods for Analysis and Synthesis of Dynamic Systems in Mechanical Engineering*. PEARSON, 2016. ISBN 978-1-78449-189-5.
- [48] **Tomeh E.:** *Technická diagnostika, Vibrační diagnostika strojů a zařízení*. Technická univerzita v Liberci, 2015. ISBN 978-80-7494-174-0.
- [49] **REIGER N.:** *Rotordynamics 2. Problems in Turbomachinery*. Wien: Springer-Verlag (1988). ISBN 978-3-211-82091-9.
- [50] **Gentle J.E.:** *Computational Statistics*. International Encyclopedia of Education (Third Edition), Elsevier, 2010, Pages 93-97, ISBN 9780080448947, <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-044894-7.01316-6>
- [51] **Muehleisen R.T.:** *Use of the Monte Carlo method for uncertainty analysis of acoustic models and measurements*. J. Acoust. Soc. Am., 2005, 118, 1890 <https://doi.org/10.1121/1.4779617>
- [52] **Parziale M., Lomazzi L., Giglio, M., Cadini, F.:** *Physics-Informed Neural Networks for the Condition Monitoring of Rotating Shafts*. Sensors 2024, 24, 207. <https://doi.org/10.3390/s24010207>
- [53] **Dubigeon S., Michon J.C.:** *Gyroscopic behaviour of stressed rotating shafts*. Journal of Sound and Vibration, Volume 42, Issue 3, 1975, Pages 281-293, ISSN 0022-460X, [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(75\)90245-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(75)90245-X)

PUBLIKOVANÁ LITERATÚRA AUTORA

- [1] **Michal P., Paulec M., Šavrnich Z., Vaško M.:** *Modelovanie a analýza tenkých vrstvených kompozitných dosiek vystužených uhlíkovými vláknami.* Technológ. - ISSN 1337-8996. - Roč. 13, č. 4 (2021), s. 11-14.
- [2] **Šavrnich Z., Sapietová A., Paulec M., Michal P., Gavlas M.:** *Návrh brzdového systému automobilu 1. časť : Dynamické zaťaženie náprav a brzdná dráha vozidla.* Technológ. - ISSN 1337-8996. - Roč. 13, č. 4 (2021), s. 24-27.
- [3] **Sága M. Paulec M., Kopas P., Michal P., Šavrnich Z.:** *Vplyv mechanických a tepelných cyklov na životnosť nástrojovej ocele 1.2714.* Technológ. - ISSN 1337-8996. - Roč. 13, č. 4 (2021), s. 20-23.
- [4] **Zvada B., Nosek R., Holešová N., Klačko A., Šavrnich Z.:** *Konvenčné spôsoby výroby vodíka z fosílnych palív.* Technológ. - ISSN 1337-8996. - Roč. 14, č. 1 (2022), s. 83-87.
- [5] **Sapieta M., Dekýš V., Kopas., Jakubovičová L., Šavrnich Z.:** *The impact of excitation periods on the outcome of lock-in thermography.* Materials. - Bazilej : Multidisciplinary Digital Publishing Institute. ISSN 1996-1944 (online). - Roč. 16, č. 7 (2023), s. [1-14] [online].
- [6] **Šavrnich Z., Sapietová A., Dekýš V., Drvárová B.:** *Solver Analysis For a Rotary Machine Model In Msc.Adams.* Conference Paper. Applied Mechanics (2024).
- [7] **Šavrnich Z., Sapietová A., Paulec M.:** *Contribution To The Creation Of Computational Models In The Msc.Adams.* Conference Paper. Applied Mechanics (2023).
- [8] **Šavrnich Z., Sapieta M., Dekýš V., Ferfecki P., Zapoměl J., Sapietová A., Molčan M., Fusek M.:** *Probabilistic analysis of critical speed values of a rotating machine as a function of the change of dynamic parameters.* Sensors (ISSN 1424-8220) – Accepted for print

RESUMÉ

Táto dizertačná práca sa zaoberá modelovaním vybraných poruchových stavov rotorových sústav, konkrétne stavov rotorov s nevyváženou hmotou alebo s nakloneným diskom. Hlavným cieľom je preskúmať vplyv nevyváženosti a náklonu disku na kritickú rýchlosť a tvar orbity (dráhy bodu), resp. tvar orbitálu (oblasti výskytu orbít). Na dosiahnutie tohto cieľa boli použité numerické simulácie dynamických vlastností rotora spolu s využitím metódy konečných prvkov a Monte Carlo analýzy, ktorá umožnila zohľadniť variabilitu vstupných parametrov. Ako vzorové zariadenie bol zvolený Lavalov rotor, ktorého experimentálny model bol použitý na verifikáciu numerického modelu.

Práca je rozdelená na teoretickú a praktickú časť. Teoretická časť sa venuje histórii dynamiky rotorov, metódam modelovania rotorových systémov, základným chybovým stavom a nedokonalostiam, ktoré môžu vzniknúť, a ich zakomponovaniu do numerických modelov. Diskutuje tiež vplyvy neurčitosti parametrov, ktoré vyplývajú z konštrukcie prvkov systému alebo môžu vzniknúť pri výrobe či montáži. Tretia kapitola teoretickej časti sa venuje zostaveniu pohybových rovníc pre Lavalov rotor s uvažovaním bez tlmenia a s tlmením.

Praktická časť práce sa zameriava na vyhodnotenie veľkého množstva dát z numerických simulácií v prostredí MSC Adams. Popisuje výber vhodného solvera pre riešenie simulácií, numerický model Lavalovho rotora vytvorený v programe MSC Adams a jeho validáciu pomocou experimentálneho zariadenia Rotorkit. Ďalej sú popísané vybrané konfigurácie rotorových sústav Lavalovho rotora, líšiace sa polohou disku a simulovanými poruchovými stavmi (nevyvážený alebo naklonený disk). Záverečná kapitola praktickej časti porovnáva výsledky analýz pre jednotlivé druhy porúch a diskutuje ich vplyv na dynamiku rotora.

Táto dizertačná práca priniesla nové poznatky o dynamickom správaní rotorov s nevyváženosťou a náklonom disku, predovšetkým z pohľadu zohľadnenia variability vstupných údajov a analýzy pravdepodobnosti výskytu (tvaru a polohy) orbít. Výsledky práce sú relevantné pre oblasť dynamiky rotorov a môžu byť využité pri návrhu a prevádzke rotačných strojov. Ďalší výskum v tejto oblasti môže viesť k následným zlepšeniam predikcie správaniu sa týchto sústav v oblasti stability, spoľahlivosti a životnosti rotačných strojov.

Na základe výsledkov tejto práce je možné navrhnúť niekoľko smerov pre ďalší výskum. Jednou z možností je rozšírenie modelu Lavalovho rotora o ďalšie faktory, ako sú napríklad nelinearity spôsobené opotrebením ložísk a vplyv zmeny v geometrii rotora v dôsledku deformácií. Ďalším smerom výskumu by mohlo byť experimentovanie s rôznymi typmi ložísk a tlmivcov, s cieľom minimalizovať vplyv nevyváženosti a náklonu disku na dynamiku rotora. Okrem toho by bolo zaujímavé preskúmať vplyv náklonu disku na iné typy rotorov ako sú napríklad viacstupňové rotory. Pravdaže, tieto práce budú ovplyvnené výkonom použitej výpočtovej techniky a počtom simulačných behov.

SUMMARY

This dissertation deals with the modelling of selected fault states of rotor systems, namely rotor states with unbalanced mass or tilted disk. The main objective is to investigate the effect of unbalance and inclined disk on the critical velocity and orbital shape (orbit point path) and orbital shape (orbit occurrence region), respectively. To achieve this goal, numerical simulations of the dynamic properties of the rotor were used, together with the use of the finite element method and Monte Carlo analysis to account for the variability of the input parameters. A Laval rotor was chosen as a model device, whose experimental model was used to verify the numerical model.

The thesis is divided into theoretical and practical parts. The theoretical part is devoted to the history of rotor dynamics, methods of modelling rotor systems, basic error states and imperfections that can arise and their incorporation into numerical models. It also discusses the effects of parameter uncertainties that arise from the design of system elements or that may arise during manufacturing or assembly. The third chapter of the theoretical part is devoted to the formulation of equations of motion for the Laval rotor with and without damping considerations.

The practical part of the thesis focuses on the evaluation of a large amount of data from numerical simulations in the MSC Adams environment. It describes the selection of a suitable solver for solving the simulations, the numerical model of the Laval rotor created in MSC Adams and its validation using the Rotorkit experimental setup. Furthermore, selected Laval rotor configurations are described, differing in the position of the disk and the simulated fault conditions (unbalanced or tilted disk). The final chapter of the practical section compares the results of the analyses for the different types of faults and discusses their influence on the rotor dynamics.

This thesis has provided new insights into the dynamical behaviour of rotors with unbalanced and inclined discs, particularly in terms of considering the variability of input data and analysing the probability of occurrence (shape and position) of orbits. The results of the study are relevant to the field of rotor dynamics and can be used in the design and operation of rotating machines. Further research in this area may lead to subsequent improvements in predicting the stability, reliability and lifetime behaviour of these systems in rotating machines.

Based on the results of this work, several directions for further research can be suggested. One possibility is to extend the Laval rotor model to include additional factors such as nonlinearities due to bearing wear and the effect of changes in rotor geometry due to deformations. Another direction of research could be to experiment with different types of bearings and dampers in order to minimize the effect of unbalance and tilt of the disc on the rotor dynamics. In addition, it would be interesting to investigate the effect of disc tilt on other rotor types such as multistage rotors. Admittedly, these works will be influenced by the performance of the computational equipment used and the number of simulation runs.